BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

MEXANİKA

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ ТОРЦЕВОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Н.И.ФОМИНА
Бакинский Государственный Университет

В работе [1] построены однородные решения неосесимметричной задачи растяжения теории упругости для транстропной плиты, когда торцы плиты свободны от напряжений.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача, когда торцы плиты жестко заделены.

1. Плита отнесена к сферической системе координат r,θ,φ, изменяющихся в следующих пределах:

$$r_1 \le r \le r_2\ ,\ \pi/2-\varepsilon \le \theta \le \pi/2+\varepsilon\ ;\ 0\le\varphi\le 2\pi\ .$$

Обозначения те же, как в работе [1].

Предположим, что на торцах плиты заданы следующие однородные граничные условия

$$u_r = 0\ ,\ u_\theta = 0\ ,\ u_\varphi = 0 \text{ при } \theta = \pi/2 \pm\varepsilon\ . \tag{1.1}$$

Характер граничных условий на боковой поверхности пока уточнять не будем, однако, будем считать их таковыми, что плита находится в равновесии.

Отметим, что в настоящей работе будем рассматривать только однородные граничные условия на торцах плиты, так как снятие нагрузки с торцов плиты можно осуществить с помощью приемов, развитых в работах [2, 3].

Используя результаты работы [1], компоненты вектора перемещений можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_r &= r^\lambda\left[A_1T_{\gamma_1}(\theta)+A_2T_{\gamma_2}(\theta)\right]e^{im\varphi} \\ u_\theta &= r^\lambda\left\{b_0\left[T'_{\gamma_1}(\theta)+T'_{\gamma_2}(\theta)\right]-\frac{m}{\sin\theta}F_{\gamma_3}(\theta)\right\}e^{im\varphi} \\ u_\varphi &= ir^\lambda\left\{\frac{mb_0}{\sin\theta}\left[T_{\gamma_1}(\theta)+T_{\gamma_2}(\theta)\right]-F_{\gamma_3}(\theta)\right\}e^{im\varphi}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $i=\sqrt{-1}$

$$T_\gamma(\theta)=P_\gamma^m(\sin\varepsilon\eta)+P_\gamma^m(-\sin\varepsilon\eta)$$

$$F_\gamma(\theta) = -\left[P_\gamma^m(\sin\varepsilon\eta) - P_\gamma^m(-\sin\varepsilon\eta)\right]$$

$$A_k = -b_{22}\gamma_k(\gamma_k + 1) + z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1)$$

$$b_0 = -\left[(b_{12} + 1)(z - y_2) + b_{22} + b_{23} + 2\right],$$

$\lambda = z - \dfrac{1}{2}$; γ_1, γ_2 - корни биквадратного уравнения

$$b_{22}\gamma^2(\gamma+1)^2 - \left[\left(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + 2b_{22} + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1)\right]\times$$

$$\times\gamma(\gamma+1) + \left[b_{11}\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})\right]\left[z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1)\right] = 0\,. \quad (1.3)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{G_0}\left[z^2 - \frac{1}{4} + 2(G_0 - 1)\right],\ G_0 = G\cdot G_1^{-1},\ E_0 = E_1\cdot E^{-1}$$

$$mb_{11} = 2G_0E_0(1 - \nu^2),\ mb_{22} = 2G_0(1 - \nu_1\nu_2),$$

$$mb_{12} = 2G_0\nu_1(1 + \nu),\ \ mb_{23} = 2G_0(\nu - \nu_1\nu_2),\ m = 1 - \nu - 2\nu_1\nu_2,$$

ν, ν_1, ν_2, G, G_1, E, E_1 - технические константы материала. $P_\gamma^m(\sin\varepsilon\eta)$ - присоединенная функция Лежандра.

Удовлетворяя однородные граничные условия (1.1), получаем характеристическое уравнение относительно собственных значений z:

$$\Delta(z,\theta_1) = F_{\gamma_3}^{'}(\theta_1)\left[A_2T_{\gamma_2}(\theta_1)T_{\gamma_1}^{'}(\theta_1) - A_1T_{\gamma_1}(\theta_1)T_{\gamma_2}^{'}(\theta_1)\right] +$$

$$+\frac{m^2}{\sin^2\theta_1}(A_1 - A_2)T_{\gamma_1}(\theta_1)T_{\gamma_2}(\theta_1)F_{\gamma_3}(\theta_1). \quad (1.4)$$

Трансцендентное уравнение (1.4), как целая функция параметра z, определяет счетное множество z_n с точкой сгущения на бесконечности. Суммируя всем корням, получаем однородные решения следующего вида:

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{1n}(\theta)e^{im\varphi}$$

$$u_\theta = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{2n}(\theta)e^{im\varphi}$$

$$u_\varphi = \frac{i}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} u_{3n}(\theta)e^{im\varphi}$$

$$\sigma_r = \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{1n}(\theta)e^{im\varphi}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{2n}(\theta)e^{im\varphi} \quad (1.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} Q_{3n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{G_1}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{1n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{G_1 i}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{2n}(\theta) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{G_1 i}{r\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{z_n} T_{3n}(\theta) e^{im\varphi},$$

где

$$u_{1n}(\theta) = A_1\Delta_{1n}T_{\gamma_1}(\theta) - A_2\Delta_{2n}T_{\gamma_2}(\theta)$$

$$u_{2n}(\theta) = b_0\left[\Delta_{1n}T'_{\gamma_1}(\theta) - \Delta_{2n}T'_{\gamma_2}(\theta)\right] - \Delta_{3n}F_{\gamma_3}(\theta)$$

$$u_{3n}(\theta) = \frac{mb_0}{\sin\theta}\left[\Delta_{1n}T_{\gamma_1}(\theta) - \Delta_{2n}T_{\gamma_2}(\theta)\right] - \Delta_{3n}F'_{\gamma_3}(\theta)$$

$$Q_{1n}(\theta) = \left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + 2b_{12}\right]A_1 - b_{12}b_0\gamma_{1n}(\gamma_{1n}+1)\right\}\Delta_{1n}T_{\gamma_{1n}}(\theta) -$$

$$-\left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + 2b_{12}\right]A_2 - b_{12}b_0\gamma_{2n}(\gamma_{2n}+1)\right\}\Delta_{2n}T_{\gamma_{2n}}(\theta)$$

$$Q_{2n}(\theta) = \left\langle\left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23}\right]A_1 - b_{23}b_0\gamma_{1n}(\gamma_{1n}+1) - \frac{2m^2G_0b_0}{\sin^2\theta}\right\}T_{\gamma_1}(\theta) +\right.$$

$$\left. + 2G_0b_0 ctg\theta T'_{\gamma_1}(\theta)\right\rangle\Delta_{1n} - \left\langle\left\{\left[b_{12}\left(z_n - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23}\right]A_2 - b_{23}b_0\gamma_{2n}(\gamma_{2n}+1) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2m^2G_0b_0}{\sin^2\theta}\right\}T_{\gamma_2}(\theta) + 2G_0b_0 ctg\theta T'_{\gamma_2}(\theta)\right\rangle\Delta_{2n} + \frac{2G_0m}{\sin\theta}\left[F'_{\gamma_3}(\theta) - ctg\theta F_{\gamma_3}(\theta)\right]\Delta_{3n}$$

$$Q_{3n}(\theta) = D_{11}\Delta_{1n} - D_{12}\Delta_{2n} - \frac{2G_0m}{\sin\theta}\left[F'_{\gamma_3}(\theta) - ctg\theta F_{\gamma_3}(\theta)\right]\Delta_{3n}$$

$$T_{1n}(\theta) = d_{11}\Delta_{1n}T'_{\gamma_1}(\theta) - d_{12}\Delta_{2n}T'_{\gamma_2}(\theta) - \frac{\left(z_n - 3/2\right)}{\sin\theta}m\Delta_{3n}F_{\gamma_3}(\theta)$$

$$T_{2n}(\theta) = \frac{m}{\sin\theta}\left[d_{11}\Delta_{1n}T_{\gamma_{1n}}(\theta) - d_{12}\Delta_{2n}T_{\gamma_{2n}}(\theta)\right] - \left(z_n - 3/2\right)\Delta_{3n}F_{\gamma_{3n}}(\theta)$$

$$T_{3n}(\theta) = \frac{2mb_0}{\sin\theta}\left[l_1(\theta)\Delta_{1n} - l_2(\theta)\Delta_{2n}\right] - L(\theta)\Delta_{3n}$$

$$\Delta_{1n} = -T'_{\gamma_{2n}}(\theta_1)F'_{\gamma_{3n}}(\theta_1) + \frac{m^2}{\sin^2\theta_1}T_{\gamma_{2n}}(\theta_1)F_{\gamma_{3n}}(\theta_1)$$

$$\Delta_{2n} = -T'_{\gamma_{1n}}(\theta_1)F'_{\gamma_{3n}}(\theta_1) + \frac{m^2}{\sin^2\theta_1}T_{\gamma_{1n}}(\theta_1)F_{\gamma_{3n}}(\theta_1)$$

$$\Delta_{3n} = \frac{b_0 m}{\sin\theta}\left[T'_{\gamma_{1n}}(\theta_1)T_{\gamma_{2n}}(\theta_1) - T'_{\gamma_{2n}}(\theta_1)T_{\gamma_{1n}}(\theta_1)\right]$$

$$D_{1k}(\theta) = \left(c_{1k} + \frac{2b_0G_0m^2}{\sin\theta}\right)T_{\gamma_k}(\theta) - 2b_0G_0 ctg\theta T'_{\gamma_k}(\theta) \qquad (k = 1,2)$$

$$L(\theta) = 2ctg\theta F'_{\gamma_3}(\theta) + \left[\gamma_3(\gamma_3 + 1) - \frac{2m^2}{\sin^2\theta}\right]F_{\gamma_3}(\theta)$$

$$l_k(\theta) = T'_{\gamma_k}(\theta) - ctg\theta T_{\gamma_k}(\theta)$$

$$H(\theta) = (d_{11} - d_{12})T'_{\gamma_1}(\theta)T'_{\gamma_2}(\theta) + ctg\theta\left[d_{12}T_{\gamma_1}(\theta)T'_{\gamma_2}(\theta) - d_{11}T_{\gamma_2}(\theta)T'_{\gamma_1}(\theta)\right]$$

$$c_{1k} = \left[b_{12}\left(z - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23}\right]A_k - b_{22}b_0\gamma_k(\gamma_k + 1)$$

$$d_{1k} = A_k + \left(z - \tfrac{3}{2}\right)b_0\,,\ c_{13} = -2G_0b_0\,.$$

c_k - произвольные постоянные, которые определяются при выполнении граничных условий на боковой поверхности.

2. Как видно из (1.4), характеристическое уравнение имеет весьма сложную структуру.

Для эффективного изучения его корней сделаем некоторые предположения относительно геометрических параметров плиты. Именно положим

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon\eta\,,\ -1 \le \eta \le 1\,, \tag{2.1}$$

где $\theta = \pi/2$ - срединная плоскость плиты, ε - безразмерный параметр, характеризующий ее толщину, η - новая переменная, отсчитываемая от срединной плоскости. Подставляя (2.1) в уравнение (1.4), получаем

$$D(z,\varepsilon) = \Delta(z,\theta_1) = 0\,. \tag{2.2}$$

Докажем, что функция $D(z,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ ограниченных нулей не имеет. Для этой цели, раскладывая функции $T_\gamma(\theta)$, $T'_\gamma(\theta)$, $F_\gamma(\theta)$, $F'_\gamma(\theta)$ в окрестности плоскости $\pi/2$ в ряд по ε, получим

$$T_\gamma(\theta) = \frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)}\cos\tfrac{\pi}{2}(\gamma+m)\left\{1 - \frac{1}{2}\eta^2\varepsilon^2\left[\gamma(\gamma+1) - m^2\right] + \ldots\right\}$$

$$T_\gamma'(\theta)=-\frac{2^{m+1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma-m}{2}\right)}\cos\frac{\pi}{2}(\gamma+m)\Big\langle\left[\gamma(\gamma+1)-m^2\right]\varepsilon\eta-$$

$$-\frac{1}{3!}\left\{\left[\gamma(\gamma+1)-m^2\right]\left[\gamma(\gamma+1)-2-m^2\right]+2m^2\right\}\eta^3\varepsilon^3+\ldots\Big\rangle \qquad (2.3)$$

$$F_\gamma(\theta)=\frac{2^{m+2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\gamma-m}{2}\right)}\sin\frac{\pi}{2}(\gamma+m)\left\{\varepsilon\eta-\frac{1}{3!}\left[\gamma(\gamma+1)-1-m^2\right]\eta^3\varepsilon^3\ldots\right\}$$

$$F_\gamma'(\theta)=\frac{2^{m+2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{\gamma+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\gamma-m}{2}\right)}\sin\frac{\pi}{2}(\gamma+m)\left\{1-\frac{1}{2}\left[\gamma(\gamma+1)-1-m^2\right]\eta^2\varepsilon^2\ldots\right\}.$$

Подставляя (2.3) в (2.2) функцию $D(z,\varepsilon)$ представим в виде:

$$D(z,\varepsilon)=-\frac{2^{3m+4}}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma_1-m}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_2+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\gamma_2-m}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{\gamma_3+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\gamma_3-m}{2}\right)}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi}{2}(\gamma_3+m)\cos\frac{\pi}{2}(\gamma_1+m)\cos\frac{\pi}{2}(\gamma_2+m)\left[\gamma_2(\gamma_2-1)-\gamma_1(\gamma_1+1)\right]\times$$

$$\times\varepsilon\left[z^2-\frac{1}{4}+2(G_0-1)+0(\varepsilon^2)\right] \quad . \qquad (2.4)$$

$\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера.

Из (2.4) видно, что $z=\pm\sqrt{9/4-2G_0}$ являются корнями характеристического уравнения.

Непосредственной проверкой можно установить, что корням $z=\pm\sqrt{9/4-2G_0}$ соответствует тривиальное решение.

Как в осесимметричном случае [3] можно доказать, что все остальные функции $D(z,\varepsilon)$ безгранично растут при $\varepsilon\to 0$ и здесь возможен только случай $\varepsilon z_n\to const$ при $\varepsilon\to 0$.

Для построения асимптотики второй группы нулей отыскиваем их в виде:

$$z_n=\frac{\delta_n}{\varepsilon}+0(\varepsilon)\ \ (n=1,2,\ldots). \qquad (2.5)$$

В этом случае характеристическое уравнение (1.3) принимает вид:

$$\tau^2-2q_1\tau+q_2=0\,,\ \gamma_n=\sqrt{\tau_n} \qquad (2.6)$$

$$2q_1 = \frac{1}{b_{22}}\left(b_{11}b_{12} - b_{12}^2 - 2b_{12}\right)\delta_n^2;\ q_2 = b_{11}b_{22}^{-1}\cdot\delta_n^4 .$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $q_1 > 0\ \ q_1^2 - q_2 > 0$, $\gamma_{1,2} = \pm s_1\delta_n$, $\gamma_{3,4} = \pm s_2\delta_n$ (2.7)

$$s_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}\ \ q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \alpha + i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}\ \ q_1^2 < q_2 .$$

2. Корни характеристического уравнения (2.6) кратные

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm\delta_n p\ \ q_1 > 0\ \ q_1^2 - q_2 = 0\ \ p = \sqrt{q_1} \qquad (2.8)$$

3. $q_1 < 0\ \ q_1^2 - q_2 \neq 0\ \ \gamma_{1,2} = \pm i\delta_n s_1$, $\gamma_{3,4} = \pm i\delta_n s_2$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| + \sqrt{q_1^2 - q_2}}\ \ q_1^2 > q_2$$

$$s_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}\ \ q_1^2 < q_2$$

4. $q_1 < 0$, $q_1^2 - q_2 = 0$, $\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm i\delta_n p\ \ \ p = \sqrt{|q_1|}$. (2.9)

В случаях 1,2 после подстановки (2.5) в (1.4) и преобразования его с помощью асимптотических разложений $T_\gamma(\theta)$, $T_\gamma^{'}(\theta)$, $F_\gamma(\theta)$, $F_\gamma^{'}(\theta)$ для δ_n, соответственно, получаем.

Для вихревой задачи

$$\cos\frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} = 0 . \qquad (2.10)$$

Для потенциальной задачи

$$\frac{1 + b_{22}s_1s_2}{1 - b_{22}s_1s_2}(s_2 - s_1)\sin(s_2 + s_1)\delta_n + (s_2 + s_1)\sin(s_2 - s_1)\delta_n = 0 . \qquad (2.11)$$

$$\frac{p^2 + b_{11}}{p_2 - b_{11}}\sin 2p\delta_n + 2p\delta_n = 0 . \qquad (2.12)$$

$$\beta\left(1 + b_{22}\beta^2 - 3b_{22}\alpha^2\right)\sin 2\alpha\delta_n + \alpha\left(1 - b_{22}\alpha^2 + 3b_{22}\beta^2\right)\sin 2\beta\delta_n = 0 . \qquad (2.13)$$

Что касается 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой s_1, s_2, p на is_1, is_2, ip.

Эти уравнения имеют счетное множество корней и фактически совпадают с характеристическими уравнениями аналогичной задачи для трансверсально-изотропного упругого слоя.

Приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

Для потенциальной задачи:

Группа 1.

$$u_r^{(1)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$u_\theta^{(1)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$u_\varphi^{(1)} \approx 0;\ \sigma_r^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{rn}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi} \qquad (2.14)$$

$$\sigma_\varphi^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{\varphi n}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n^{(1)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right)$$

$$\tau_{r\varphi}^{(1)} \approx 0,\ \tau_{\theta\varphi}^{(1)} \approx 0,$$

где $\rho = r/r_1$

$$u_n^{(1)}(\eta) = s_2\left(1 - b_{22}s_1^2\right)\sin s_2\delta_n \cdot \cos s_1\delta_n\eta - s_1\left(1 - b_{22}s_2^2\right)\sin s_1\delta_n \cdot \cos s_2\delta_n\eta$$

$$w_n^{(1)}(\eta) = \left(b_{12} + 1\right)s_1 s_2\left(\sin s_2\delta_n \cdot \sin s_1\delta_n\eta - \sin s_1\delta_n \cdot \sin s_2\delta_n\eta\right)$$

$$Q_{rn}^{(1)}(\eta) = \delta_n\left[b_{11}u_n^{(1)} - b_{12}\delta_n w_n^{(1)}\right]$$

$$Q_{\varphi n}^{(1)}(\eta) = \delta_n\left[b_{12}u_n^{(1)} - b_{22}\delta_n w_n^{(1)}\right] \qquad (2.15)$$

$$Q_{\theta n}^{(1)}(\eta) = \delta_n\left[b_{12}u_n^{(1)} - b_{23}\delta_n w_n^{(1)}\right]$$

$$T_n^{(1)}(\eta) = \left[\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial\eta} - \delta_n w_n^{(1)}\right].$$

Группа 2.

$$u_r^{(2)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$u_\theta^{(2)} = \frac{r_1 \varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n w_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$u_\varphi^{(2)} \approx 0;\ \sigma_r^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{rn}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi}$$

$$\sigma_\varphi^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\varphi n}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln\rho\right) e^{im\varphi} \qquad (2.16)$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n Q_{\theta n}^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi}$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = \frac{G_1}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} E_n T_n^{(2)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi},$$

где

$$u_n^{(2)}(\eta) = (b_{12}+1)p\left\{\left[(p^2-b_{11})\cos p\delta_n + (p\delta_n)^{-1}\cdot(p^2-b_{11})\sin p\delta_n\right]\times\right.$$
$$\left.\times \cos p\delta_n\eta + \eta(p^2-b_{11})\sin p\delta_n \cdot \sin p\delta_n\eta\right\}$$
$$w_n^{(2)}(\eta) = (b_{11}-p^2)(\cos\delta_n \cdot \sin p\delta_n\eta - \eta\sin p\delta_n \cdot \cos p\delta_n\eta).$$

Выражения для $Q_{rn}^{(2)},...,T_n^{(2)}$ получаются из (2.15) простой заменой $u_n^{(1)}$, $w_n^{(1)}$ на $u_n^{(2)}$, $w_n^{(2)}$, соответственно.

Группа 3.

$$u_r^{(3)} = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_n^{(3)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi} \qquad (2.17)$$

$$u_{\theta}^{(3)} = \frac{r_1\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n w_n^{(3)}(\eta) \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) e^{im\varphi},\ u_{\varphi} \approx 0,$$

где

$$u_n^{(3)}(\eta) = (a_0\cos\beta\delta_n\eta \cdot ch\alpha\delta_n\eta - b_0\sin\beta\delta_n\eta \cdot sh\alpha\delta_n\eta)\Delta_{1n} +$$
$$+ (b_0\cos\beta\delta_n\eta \cdot ch\alpha\delta_n\eta + a_0\sin\beta\delta_n\eta \cdot sh\alpha\delta_n\eta)\Delta_{2n}$$
$$w_n^{(3)}(\eta) = (b_{12}+1)\left[(\alpha\cos\beta\delta_n\eta \cdot sh\alpha\delta_n\eta + \beta\sin\beta\delta_n\eta \cdot ch\alpha\delta_n\eta)\Delta_{1n} -\right.$$
$$\left.- (\beta\cos\beta\delta_n\eta \cdot sh\alpha\delta_n\eta + \alpha\sin\beta\delta_n\eta \cdot ch\alpha\delta_n\eta)\Delta_{2n}\right]$$
$$a_0 = 1 - b_{22}(\alpha^2 - \beta^2),\ b_0 = 2b_{22}\alpha\beta$$
$$\Delta_{1n} = -\alpha\cos\beta\delta_n \cdot sh\alpha\delta_n + \beta\sin\beta\delta_n \cdot ch\alpha\delta_n$$
$$\Delta_{2n} = \beta\cos\beta\delta_n \cdot sh\alpha\delta_n + \alpha\sin\beta\delta_n \cdot ch\alpha\delta_n.$$

Выражения $\sigma_r^{(3)},...,T_n^{(3)}$ получаются из (2.15) заменой $u_r^{(1)}$ на $u_r^{(3)}$ и $u_{\theta}^{(1)}$ на $u_{\theta}^{(3)}$, соответственно.

C_n, E_n, D_n - произвольные постоянные.

Важно отметить, что решение (2.17) характерно только для анизотропных тел, при $G_0 = 1$ полностью исчезает.

Что касается решений (2.14), (2.16), то при $G_0 = 1$ они сливаются в одно и полностью совпадают с краевым эффектом Сен-Венана в теории изотропных плит.

Аналогично для вихревой задачи получаем:

$$u_r = u_{\theta} \approx 0;\ \sigma_r = \sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = \tau_{r\theta} \approx 0$$

$$
\begin{aligned}
u_\varphi &= \frac{r_1 i\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}}\eta \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\ln\rho\right) e^{im\varphi} \\
\tau_{r\varphi} &= \frac{G_1 i}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \delta_k \cos\frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}}\eta \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\ln\rho\right) e^{im\varphi} \qquad (2.18) \\
\tau_{\theta\varphi} &= -\frac{Gi}{\rho\sqrt{\rho}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}} \sin\frac{\delta_k}{\sqrt{b_{22}}}\eta \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon}\ln\rho\right) e^{imp}.
\end{aligned}
$$

В общем случае нагружения, произвольные постоянные C_n, E_n, D_n B_n могут быть определены с помощью вариационного принципа Лагранжа. При специальных условиях опирания края плиты они определяются точно с помощью обобщенного условия ортогональности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mekhtiyev M.F. Construction of homogenous solutions of a non-axially symmetric tension problem of elasticity theory for transversally isotropic plates of variable thickness. Trans. Of NASA, Series of phys.-mech. and math. sciences, Baku, 2006, V. XXVI, N 1, p. 177-186.
2. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теорий для плиты переменной толщины. Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-тех. и матем. наук, 1979, вып. 3, с. 47-52.
3. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф. Осесимметричная задача теории упругости для неоднородной плиты переменной толщины. РАН, ПММ, 1995, вып. 3, с. 518-523.

OTURACAQLARI SƏRT BAĞLANMIŞ DƏYİŞƏN QALINLIQLI TRANSVERSİAL-İZOTROP LÖVHƏ ÜÇÜN ELASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN DARTILMA MƏSƏLƏSİNİN BİRCİNS HƏLLƏRİNİN QURULMASI

M.F.MEHDİYEV, N.İ.FOMİNA

XÜLASƏ

Oturacaqları sərt bağlanmış dəyişən qalınlıqlı transversial-izotrop lövhə üçün elastiкiyyət nəzəriyyəsinin dartılma məsələsinin bircins həlləri qurulur. İкiölçülü tangensial yerdəyişmə veкtorunu iкi hissəyə bölməкlə ümumi məsələ potensial və burulma məsələsinə gətirilir. Lövhədə yaranan gərginliк asimptotiк təhlil olunur.

CONSTRUCTION OF HOMOGENOUS SOLUTIONS OF A NON-AXIALLY SYMMETRIC TENSION PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR A VARIABLE THICKNESS TRANSTROPIC PLATE AT RIGID SEALING OF PAVEMENT PART OF BOUNDARY

M.F.MEKHTIYEV, N.I.FOMINA

SUMMARY

In the paper we consider non-axially symmetric tension problem of elasticity theory for

a variable thickness transversally-isotropic plate. It is assumed that the end walls of the plate are rigidly fastened, condition on lateral side of the boundary are not précised but are assumed to be sufficiently smooth.

Homogeneous solutions depending on the roots of characteristic equations are constructed.